On estimation of a regression model with correlated errors (Non-Regular Statistical Estimation II)

矢島, 美寛

数理解析研究所講究録
590巻 1986年 1-13

On estimation of a regression model with correlated errors

東京工大・理　矢島美寛　(Yoshihiro Yajima)

§1．序

Granger and Joyeux (1980), Hosking (1981) は観測値間の相関の強い定常時系列データを解析する為、Long-memory Model を提案している。確率変数列 $\{\varepsilon_t\}$ に対し、backward shift operator を $B\varepsilon_t=\varepsilon_{t-1}$, fractional difference operator を

$$\nabla^d=(1-B)^d=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d}{k}(-B)^k, \qquad (1)$$

で定義する。(注．∇^d は Hilbert 空間上の operator 理論を用い数学的に定義可能)　$\{\varepsilon_t\}$ が次式を満足する時 ARIMA(p,d,q) process (Long-memory process) と呼ぶ。

$$\phi(B)\nabla^d\varepsilon_t=\theta(B)a_t, \qquad (2)$$

ここで p,q は非負整数、d は実数で、∇^d は (1)式で定義される．
また

$$\phi(B)=1-\phi_1B-\cdots-\phi_pB^p,\ \theta(B)=1-\theta_1B-\cdots-\theta_qB^q,$$

で $\phi(z)\neq 0,\ \theta(z)\neq 0,\ |z|\leq 1$ を満足する。$\{a_t\}$ は無相関で

$Ea_t=0$, $Ea_t^2=\sigma_a^2$(一定)である。　このモデルはdが非負整数の時、Box and Jenkins (1976) によって提案された ARIMA Model を一般化したものである。$d<1/2$ の時は、(2)式を満足する定常時系列$\{\varepsilon_t\}$が存在し、そのスペクトラル密度は

$$f(\lambda;d)=(\sigma_a^2/2\pi)|\theta(e^{i\lambda})|^2/|\phi(e^{i\lambda})(1-e^{i\lambda})^d|^2,$$

となり、特に $0<d<1/2$ の時 $\lambda\to 0$ の際、$f(\lambda;a)$は発散する。一方自己共分散$\gamma_h(d)=E\varepsilon_t\varepsilon_{t+h}$ は

$$\gamma_h(d)=O(h^{2d-1})\ (h\to\infty), \qquad (3)$$

となり、通常の ARMA process 等に比し、0への収束が遅くなる。

本論文では誤差項$\{\varepsilon_t\}$が上述の ARIMA(p,d,q) process に従う回帰モデルのパラメータ推定について論じる

<u>モデル</u>　　$y_t=X_t'\beta+\varepsilon_t$,

where　y_t ; an observed sequence

$X_t=(x_{t1},\cdots,x_{tl})'$ a l-vector of nonstochastic regressers,

$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_l)'$ unknown parameters

$\varepsilon_t\sim$ an ARIMA(p,d,q) process.

$Y_T=(y_1,\cdots,y_T)'$ を観測値として、次の様な推定方法を用いる。

(a) まず回帰パラメータβをLSE ($\hat{\beta}_T$, say) で推定する。

(b) 次に$\hat{\varepsilon}_{t,T}\equiv y_t-X_t'\hat{\beta}_T$を真の$\varepsilon_t$とみなし、通常時系列解

析の分野で用いられる方法により $(d, \sigma_a^2, \theta_1, \cdots, \theta_q, \phi_1, \cdots, \phi_p)$ を推定する．

以下では $0<d<1/2$ とする． したがってスペクトラル密度は有界でなく，誤差項間の相関が強いという非正則な状況で，上述の推定量がどのような漸近的性質をもつかを考える．

§2. LSE $\hat{\beta}_T$ の漸近的性質について

本章ではまず $\hat{\beta}_T$ が強一致性を持つ為の，X_t に関する十分条件を導く。次に $\hat{\beta}_T$ の相対効率を調べる為，多項式回帰モデルにおける $\hat{\beta}_T$ と BLUE ($\tilde{\beta}_T$, say) の共分散行列の極限を比較する．

強一致性

$$\hat{\beta}_T = V_T^{-1} \sum_{t=1}^{T} X_t y_t \ . \quad \text{where} \quad V_T \underset{d}{=} \sum_{t=1}^{T} X_t X_t'.$$

定理 1　μ_t を V_t の最小固有値

(i)　$\mu_t / t^{2d} \longrightarrow \infty \ (t \to \infty)$,

(ii)　$\sum_{t=\ell+2}^{\infty} \log^2 t \cdot t^{2d} / (t \, \mu_{t-1}) < \infty$,

が成立する時，

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta \quad a.s.$$

（略証） S. I. (1981) の方法に従い以下の2つの式を証明すれば，確率収束の一意性より導かれる。

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta . \qquad (4)$$

$$\hat{\beta}_T \ \text{converges} \ \ a.s. \ (T \to \infty). \qquad (5)$$

$R_T(d)$ を (i,j) 成分が $\gamma_{i-j}(d)$ となる $T\times T$ 行列とする．その時．

正定数 k が存在して

$$R_T(\alpha) < k\,T^{2\alpha} I_T, \qquad (6)$$

が成立する。ここで I_T は $T \times T$ 単位行列、不等号は正定値の意味で定義する。すると条件 (i), (6) 式より (4) が成立する.

一方 $\hat{\beta}_T$ は

$$\hat{\beta}_T = \hat{\beta}_{T-1} + V_T^{-1} X_T e_T, \quad e_T \triangleq y_T - X_T' \hat{\beta}_{T-1}, \quad T \geq l+1,$$

と表現出来る。従って (5)式は

$$\sum_{t=l+1}^{T} \bar{c}_t e_t \ \text{converges a.s} \ (T \to \infty), \qquad (7)$$

と同等である。ここで $\bar{c}_t \triangleq \alpha' V_t^{-1} X_t$, α は任意の l 次元ベクトル. $v_t^2 \triangleq (1 + X_t' V_{t-1}^{-1} X_t)$ とすれば、任意の数列 $\{c_t\}$ に対し

$$\sum_{t=l+1}^{\infty} \log^2 t \cdot t^{2\alpha} c_t^2 v_t^2 < \infty, \qquad (8)$$

が成立する時

$$\sum_{t=l+1}^{T} c_t e_t \ \text{converges a.s} \ (T \to \infty).$$

条件 (ii) の下で、$\{\bar{c}_t\}$ は (8)式を満足する。従って (7)式が成立.

系1. $$m_{ij}^T(h) \triangleq \sum_{t=1}^{T-h} x_{t+h,i}\, x_{tj}, \quad h \geq 0,$$
$$\triangleq \sum_{t=1-h}^{T} x_{t+h,i}\, x_{tj}, \quad h < 0.$$

(C1) $\rho_{ij}(h) = \lim_{T \to \infty} m_{ij}^T(h) / (\|x_i\|_T \|x_j\|_T)$ が存在, $1 \leq i, j \leq l$, $h = 0, \pm 1, \cdots$ ここで $\|x_i\|_T = (m_{ii}^T(0))^{1/2}$.

(C2) $\tilde{\rho}(0)$ は nonsingular ここで $\tilde{\rho}(h) = [\rho_{ij}(h)]_{l \times l}$

(C1), (C2) および

$$0 < \liminf_{t \to \infty} \|x_i\|_t^2 / t^{\zeta}, \quad 1 \leq i \leq l, \quad {}^{\exists}\zeta > 2\alpha,$$

が成立する時

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta \quad a.s.$$

（略証）　$D_t = \mathrm{diag}(\|X_1\|_t, \|X_2\|_t, \cdots, \|X_l\|_t)$，$G_t = D_t^{-1} V_t D_t^{-1}$

とおく。この時 $\|\alpha\| = 1$ なる任意の l 次元ベクトルに対し

$$\alpha' V_t \alpha \geq \lambda_{min}(G_t) \min_{1\leq i\leq l} \|X_i\|_t^2 .$$

ここで $\lambda_{min}(\cdot)$ は最小固有値を意味する．故に

$$\liminf_{t\to\infty} \mu_t / t^3 \geq \lambda_{min}(\tilde{\rho}(0)) \liminf_{t\to\infty} \min_{1\leq i\leq l} \|X_i\|_t^2 / t^3 > 0.$$

従って μ_t は、定理 1 の条件 (i)，(ii) を満足する．

定理 1 は自己共分散が(3)式をみたす定常過程 $\{\varepsilon_t\}$ でも成立。またて $X_{ti} = \cos\nu_i t, \sin\nu_i t$ or t^{i-1} などは系 1 の条件を満足する。したがって定理 1 は Doob (1953) の Theorem X.6.2 の拡張である。

<u>The limits of the covariance matrices of the LSE and the BLUE</u>

今モデルを

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \cdots + \beta_l t^{l-1} + \varepsilon_t,$$

とする．Grenander (1954) はスペクトル密度が positive, continuous の時，X_t に対するある種の条件のもとで LSE が BLUE に対して漸近有効であることを示した．ここではスペクトル密度が連続でない ARIMA (p, d, q) process に対して LSE の BLUE に関する相対効率を調べる．

<u>定理 2</u>.　$D_T \underset{d}{=} \mathrm{diag}(\|X_1\|_T, \cdots, \|X_l\|_T)$　$(X_{ti} = t^{i-1})$

$$\lim_{T\to\infty} D_T E(\hat{\beta}_T-\beta)(\hat{\beta}_T-\beta)' D_T/T^{2d} = \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 M^{-1} H(d) M^{-1}.$$

ここで　$M=(m_{ij}) = \left(\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}/(i+j-1) \right)$

$H(d) = (h_{ij}(d)) = \Big([\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2} \Gamma(1-2d)/\{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\}]$
$\times \int_0^1\int_0^1 x^{i-1} y^{j-1} |x-y|^{2d-1} dx\,dy \Big)$（$\Gamma(z)$; ガンマ関数）

（略証）　$D_T E(\hat{\beta}_T-\beta)(\hat{\beta}_T-\beta)' D_T/T^{2d}$

$$= (D_T^{-1} V_T D_T^{-1})^{-1} \{ D_T^{-1} \tilde{X}_T' R_T(d) \tilde{X}_T D_T^{-1}/T^{2d} \} (D_T^{-1} V_T D_T^{-1})^{-1}$$

ここで　$\tilde{X}_T$ は $T\times l$ 行列で (i,j) 成分は $x_{ij}\,(=i^{j-1})$．この時

$$\lim_{T\to\infty} D_T^{-1} V_T D_T^{-1} = M.$$

および

$$\gamma_k(d) \sim \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 \Gamma(1-2d)/\{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\} k^{2d-1} \ (k\to\infty),$$

（Hosking, Theorems 1 and 2）に注意すると，

$$\lim_{T\to\infty} D_T^{-1} \tilde{X}_T' R_T(d) \tilde{X}_T D_T^{-1}/T^{2d} = \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 H(d),$$

が成立する。

<u>定理3</u>.

$$\lim_{T\to\infty} D_T E(\tilde{\beta}_T-\beta)(\tilde{\beta}_T-\beta)' D_T/T^{2d} = \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 W^{-1}(d)$$

ここで　$W(d) = (w_{ij}(d)) = \Big([\Gamma(i-d)\Gamma(j-d)\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}]$
$/\{\Gamma(i-2d)\Gamma(j-2d)(i+j-1-2d)\} \Big)$

（略証）　$x_{t1}=1$, $x_{tj} = \prod_{n=1}^{j-1}(t-n)$, $2\le j\le l$ と仮定しても極限の値は同じである．また $\phi(B)\equiv 1$ としても一般性を失わない。与任意の定数，x_i, $1\le i\le l$ に対して

$$\sum_{j=1}^{T} \tilde{\tau}_j y_j = \sum_{i=1}^{l} x_i \tilde{\beta}_{i,T},$$

とおく。この時 $\tilde{P}_T(z) \underset{\alpha}{=} \sum_{j=1}^{T} \tilde{\tau}_j z^{j-1}$ は、制約条件

$$P_T^{(k-1)}(1) = x_k, \quad 1 \leq k = l,$$

のもとで

$$(\sigma_a^2/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} | P_T(e^{i\lambda}) \theta(e^{i\lambda})|^2/|1-e^{i\lambda}|^{2d} d\lambda,$$

を最小にする。ここで $P_T(z) \underset{\alpha}{=} \sum_{j=1}^{T} \tau_j z^j$. あとは Grenander and Rosenblatt (1954) の結果を応用する。

定理3は Adenstedt (1974, 定理5.1の系) のひとつの拡張になっている. 今 LSE の relative efficiency を

$$e(d) = \lim_{T\to\infty} \det[E(\tilde{\beta}_T - \beta)(\tilde{\beta}_T - \beta)']/\det[E(\hat{\beta}_T - \beta)(\hat{\beta}_T - \beta)'],$$

とする. 定理2,3より簡単な場合は

$$e(d) = (1+2d)\Gamma(1+d)\Gamma(2-2d)/\Gamma(1-d) \qquad , l=1,$$

$$= 36\,\Gamma(2-d)^2/\{(1+2d)^2(3+2d)(3-2d)\Gamma(1+d)^2\Gamma(3-2d)^2\}, l=2,$$

となる。具体的には、

$e(d)$の値

$l \backslash d$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	1.000	0.995	0.987	0.982	0.985	1.000
2	1.000	0.986	0.956	0.925	0.901	0.885 (= 8/9)

$d=0.5$ の値は $\lim_{d\to 0.5} e(d)$

このかぎりでは LSE は漸近有効ではないが、高い相対効率をもつ。

§3. 誤差項のパラメータ推定について

簡単の為 $\varepsilon_t \sim ARIMA(0,d,0)$ process として (d, σ_a^2) の推定について考える。

仮定　$d \in D = [\delta, 1/2 - \delta]$, $0 < \delta < 1/4$, $0 < \sigma_a^2 < \infty$.

真値　$d_0, \sigma_{a,0}^2$ (say).

β が既知の時は、以下の2つの推定量が通常用いられる。

(i) $(\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2)$ L.S.E.

$\tilde{d}_T$ は

$$U_T(d,\beta) \underset{\text{def}}{=} 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{t=1}^{T} (y_t - X_t'\beta) e^{-it\lambda}\right|^2 / g(\lambda; d)\, d\lambda,$$

を最小にする。ここで $g(\lambda; d) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}$ また $\tilde{\sigma}_{a,T}^2$ は

$$\tilde{\sigma}_{a,T}^2 \underset{\text{def}}{=} U_T(\tilde{d}_T, \beta)/T,$$

によって定義される。

(ii) $(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ Gaussian MLE

対数尤度をTで割った量を

$$L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta) \underset{\text{def}}{=} -\log(2\pi\sigma_a^2)/2 - \sum_{t=1}^{T} \sigma_{t-1}^2(d)/(2T)$$
$$- \sum_{t=1}^{T} a_t^2(d)/(2T\sigma_{t-1}^2(d)\sigma_a^2),$$

ここで　$a_{t+1}(d,\beta) \underset{\text{def}}{=} (y_{t+1} - X_{t+1}'\beta) - E_d\{y_{t+1} - X_{t+1}'\beta \mid y_t, \cdots, y_1\}$

$$\sigma_t^2(d) \underset{\text{def}}{=} E_d\{a_{t+1}(d,\beta)\}^2/\sigma_a^2,$$

とする。$(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ は $L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta)$ を最大にする。

ある種の正則条件のもとで Walker (1964), Hanna (1973) はこれらの推定量の漸近的性質を導いている。我々のモデルは、彼等によって導入された正則条件を満足しないが、にも

かかわらず、推定量が強一致性をもつこと、及び漸近正規性あるいは収束の速度が示されている。(cf. Yajima (1985)).

本論ではβが<u>未知</u>の場合を扱う。したがって$\hat{\beta}_T$をβに代入し、$U_T(d, \hat{\beta}_T)$, $L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta)$を最小あるいは最大にする$d, \sigma_a^2$を新たに、各々$(\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2)$, $(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$と定義する。

<u>$(\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2)$ の漸近的性質について</u>

<u>定理 4</u> (強一致性) (C_1), (C_2) 及び

(C_3) ε_t; an ergodic process

(C_4) $\limsup_{t\to\infty} \|X_i\|_{n(t)} / \|X_i\|_{m(t)} < \infty$

for $\forall\{m(t)\}$, $\forall\{n(t)\}$ st. $n(t) \geq m(t)$, $\forall t$,

$m(t) \to \infty \ (t\to\infty)$, $\lim_{t\to\infty} n(t)/m(t) = 1$,

が成立する時

$$\lim_{T\to\infty} (\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2) = (d_0, \sigma_{a,0}^2) \quad a.s.$$

(略証) 後述の Lemmas 1, 2 を用い

$$\lim_{T\to\infty} \{U_T(d; \hat{\beta}_T) - U_T(d; \beta)\}/T = 0 \quad a.s$$

uniformly in $d \in D$ を示し、以前の結果 (Yajim (1985)) に持ち込む.

<u>Lemma 1</u> (C_1), (C_2), (C_4) を仮定.

$$\lim_{T\to\infty} (D_T / T^{1/2})(\hat{\beta}_T - \beta) = 0 \quad a.s.$$

(略証) $S_n \equiv (\|X_i\|_n / n^{1/2})(\hat{\beta}_{i,n} - \beta)$

とおき、一方 ν と $n(m)$ を

$(1-2d_0)\nu>1$ を満足し、かつ $n(m)$ を m^{ν} より大きい最小の整数とする。この時

$$\lim_{m\to\infty} S_{n(m)}=0 \quad \text{a.s.}$$

が示せる。一方

$$\lim_{m\to\infty} \max_{n(m)\le n<n(m+1)} |S_n-S_{n(m)}|=0. \ \text{a.s}$$

も成立する。

<u>Lemma 2.</u> $(C_1)\sim(C_4)$ を仮定.

$$\lim_{T\to\infty}(1/T^{1/2})\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\varepsilon_t D_T^{-1} X_s e^{i(t-s)\lambda}\right\}/g(\lambda;d)\,d\lambda$$
$$=0 \quad \text{a.s. uniformly in } d\in D.$$

（略証） Lemma 1 の証明方法と Hannan (1971, P.774) の方法を用いる。

<u>定理 5</u>.（漸近正規性；収束速度）$(C_1)\sim(C_4)$ を仮定

(i) $0<d_0<1/4$

(C_5) $E\{a_t^i \mid \mathfrak{F}_{t-1}\},\ 1\le i\le 4$ は constants a.s. ここで

$\mathfrak{F}_{t-1} \underset{\text{def}}{=} \sigma\{x_s;\ s\le t-1\}$

を仮定する。この時

$$T^{1/2}(\tilde{d}_T-d_0,\ \tilde{\sigma}_{a,T}^2-\sigma_{a,0}^2)\xrightarrow[L]{} N(0,A)\ (T\to\infty)$$

ここで
$$A=\begin{pmatrix}6/\pi^2 & 0\\ 0 & 2\sigma_{a,0}^4+K_{4,0}\end{pmatrix}$$

$K_{4,0}$ は a_t の 4 次キュムラント.

(ii) $d_0=1/4$.

$$H_{T,j}(\lambda) \overline{\overline{\alpha}} \left|\Sigma_{s=1}^{T} x_{sj}\, e^{is\lambda}\right|^2 / (2\|x_j\|_T^2),$$

$$M_{T,j}(\delta) \overline{\overline{\alpha}} \sup_{\delta \le \lambda \le \pi} H_{T,j}(\lambda),$$

と定義する。もし

$$\lim_{T\to\infty} M_{T,j}(\delta) = 0,\ {}^{\forall}\delta > 0,\ 1 \le j \le \ell$$

が成立すれば、

$$(\tilde{d}_T - d_0,\ \tilde{\sigma}_{a,T}^2 - \sigma_{a,0}^2) = O_p((\log T/T)^{1/2}).$$

(iii) $1/4 < d_0 < 1/2$.

もし

$$H_{T,j}(\lambda) \le K/(T\lambda^2),\ 0 < \lambda \le \pi,\ 1 \le j \le \ell$$

が成立すれば、（Kは定数）

$$(\tilde{d}_T - d_0,\ \tilde{\sigma}_{a,T}^2 - \sigma_{a,0}^2) = o_p(1/T^{1-2d_0}).$$

（略証）簡単の為、$(\tilde{d}_T - d_0)$ のみ考える。

$$0 = U_T^{(1)}(d_0, \hat{\beta}_T) + (\tilde{d}_T - d_0)\, U_T^{(2)}(d_T^*, \hat{\beta}_T),\ |d_T^* - d_0| \le |\tilde{d}_T - d_0|.$$

したがって

$$\lim_{T\to\infty} \{U_T^{(2)}(d, \hat{\beta}_T) - U_T^{(2)}(d, \beta)\}/T = 0 \text{ a.s uniformly in } d \in D$$

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty} \{U_T^{(1)}(d_0, \hat{\beta}_T) - U_T^{(1)}(d_0, \beta)\}/T^{1/2} = 0$$

を示せばよい．第一式は定理4と同様に示せる。一方第二式は

$$\lim_{T\to\infty} Var\{(U_T^{(1)}(d_0, \hat{\beta}_T) - U_T^{(1)}(d_0, \beta))/T^{1/2}\} = 0$$

を d_0 の各場合について示す．

$x_{ti}=\cos\nu_i t$ or $\sin\nu_i t$ は定理4の仮定を満たすが、定理5の仮定は成立しない．$x_{ti}=t^{i-1}$ はいずれの仮定もみたす．また (C_4) の条件は、より弱い条件で代替可能である。さらに定理4，5は一般の ARIMA(p,d,q) process における $(\sigma_a^2, d, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)$ の推定についても成立する。

$(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ の漸近的性質について

$$y_t=\beta_1+\beta_2 t+\cdots+\beta_\ell t^{\ell-1}+\varepsilon_t,$$

とする。

定理6

(i) (C_6) ε_t; an ergodic process $E\varepsilon_t^4<\infty$

を仮定．この時

$$\lim_{T\to\infty}(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)=(d_0, \sigma_{a,0}^2)\ \text{a.s.}$$

(ii) (C_7) ε_t; Gaussian process

を仮定．この時

$$T^{1/2}(\hat{d}_T-d_0, \hat{\sigma}_{a,T}^2-\sigma_{a,0}^2)\xrightarrow{L} N(0,A)\ (T\to\infty),$$

ここで A は定理5 (i)で定義された行列

(略証) 定理4，5と同様に

$$L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \hat{\beta}_T)-L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta)$$

及びその高次の微分項を評価する。

References

Adenstedt,R.K.(1974). On large-sample estimation for the mean of a stationary random sequence. *Ann. Statist.* 2, 1095-1107.

Box, G.E.P. & Jenkins, J.M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control.* 2nd edition. San Francisco: Holden Day.

Doob, J.L. (1953). *Stochastic Processes.* New York: Wiley.

Grenander, U. (1954). On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated errors. *Ann. Math. Statist.* 25, 252-272.

Grenander, U. & Rosenblatt, M. (1954). An extension of a theorem of G.Szegö and its application to the study of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* 76, 112-126.

Granger, C.W.J. & Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *J. Time Series Analysis.* 1, 15-29.

Hannan, E.J. (1971). Non-linear time series regression. *J. Appl. Prob.* 8, 767-780.

Hannan, E. J. (1973). The asymptotic theory of linear time series models. 10, 130-145.

Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika* 68, 165-176.

Solo, V. (1981). Strong consistency of least squares estimators in regression with correlated disturbances. *Ann. Statist.* 9, 689-693.

Walker, A.M. (1964). Asymptotic properties of least squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time series. *J. Aust. Math. Soc.* 4, 363-384.

Yajima, Y. (1985). On estimation of long-memory time series models. (To appear in *Austral. J. Statist.* 27.)